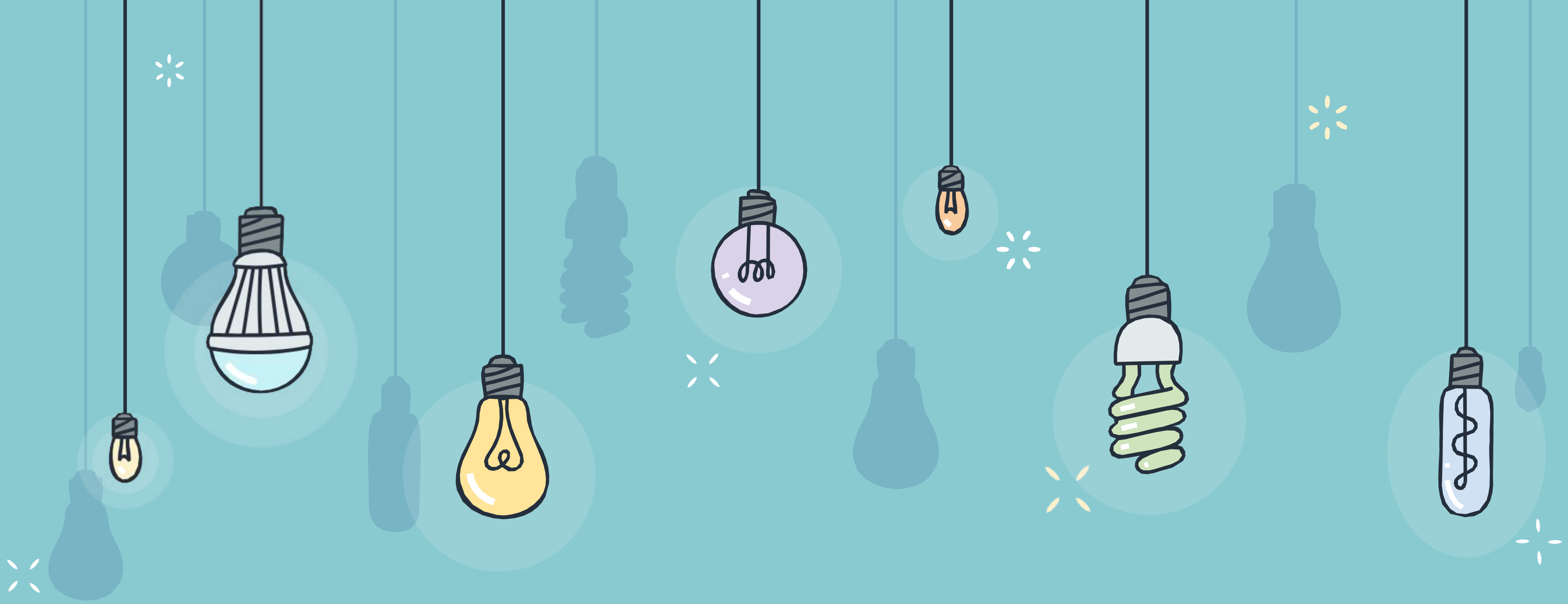
TEORI GRUP



PENGANTAR GRUP

Defenisi 1

Operasi biner (binary operation) $*$ pada suatu himpunan G didefinisikan sebagai fungsi dari $G \times G \to G$. Dengan demikian jika $*$ merupakan operasi pada G, maka $*$ dapat dipandang sebagai fungsi $*: G \times G \to G$.

Selanjutnya dengan $*\,(g_1, g_2)$ dinotasikan dengan $g_1 * g_2$ yakni

$*\,(g_1, g_2) = g_1 * g_2 \in G$

Defenisi 2

Misalkan G adalah himpunan tak kosong dan pada G didefinisikan suatu operasi biner $*$. Himpunan G disebut grup terhadap operasi $*$ jika memenuhi sifat:

Tertutup

$\forall a, b \in G$ berakibatkan $a * b \in G$

Asosiatif

$\forall a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$

Identitas

$\exists e \in G$ dan $\forall a \in G$ sedemikian hingga $a * e = e * a = a$

Invers

$\forall a \in G$, maka ada $a^{-1} \in G$ sedemikian hingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Catatan:

- Grup G terhadap operasi $*$ secara ringkas ditulis dengan $(G,*)$.
- Jika operasi $*$ pada grup G bersifat komutatif - yakni memenuhi $(\forall a, b \in G) a * b = b * a$ maka $(G,*)$ disebut grup abelian atau komutatif.

Contoh

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan adalah sebuah grup?

Jawab:

- $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan karena $a + b \in \mathbb{Z}$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Operasi penjumlahan pada bilangan bulat bersifat asosiatif karena $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
- Terdapat sebuah elemen identitas penjumlahan pada $\mathbb{Z}$ yaitu 0.
- Setiap elemen pada $\mathbb{Z}$ memiliki invers pada operasi penjumlahan karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, maka selalu ada $-a \in \mathbb{Z}$.

Soal

Andaikan G = {0, 1, 2, 3, 4, 5} adalah merupakan himpunan dari Z_6. Tunjukan bahwa G adalah suatu Grup terhadap penjumlahan (G, +).

Penyelesaian

Daftar *Cayley* G = {0, 1, 2, 3, 4, 5} terhadap (G, +)

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

a. Tertutup

Ambil sebarang nilai dari G

Andaikan $0, 1, 2, 3, 4, 5 \in G$

$1 + 2 = 3$

$1 + 3 = 4$

$1 + 4 = 5$

$1 + 5 = 0$

karena hasilnya $0, 3, 4, 5 \in G$, maka tertutup terhadap G

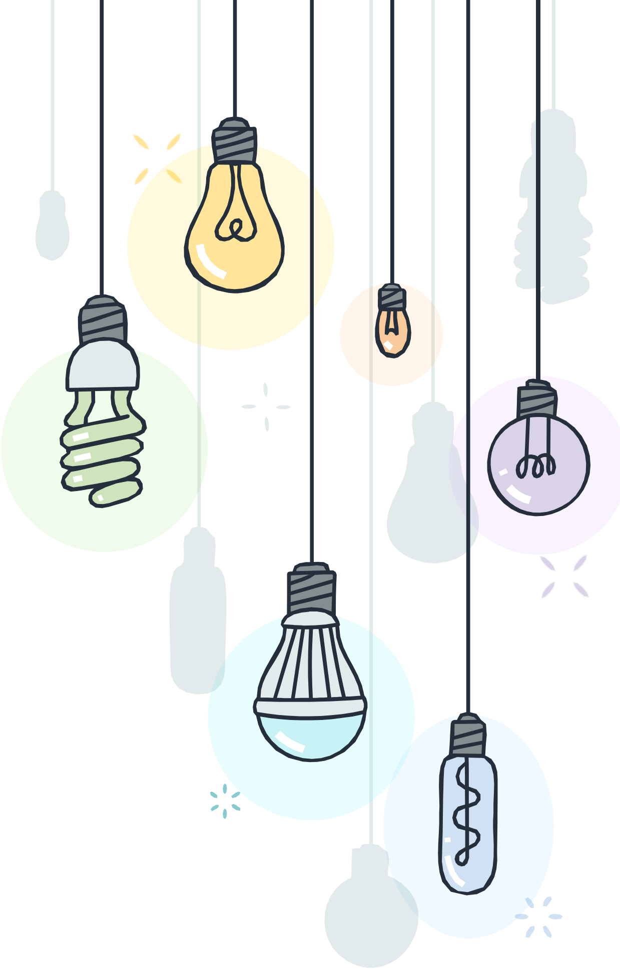
b. Assosiatif

Ambil sebarang nilai dari G

Andaikan $a = 2$, $b = 4$ dan $c = 5 \in G$

$(a + b) + c = (2 + 4) + 5 = 0 + 5 = 5$

$a + (b + c) = 2 + (4 + 5) = 2 + 3 = 5$



c. Adanya unsur satuan atau identitas ($e = 0$) terhadap penjumlahan)

Ambil sebarang nilai dari G

Andaikan $0 \in G$

$$0 + e = e + 0 = 0$$

Andaikan $1 \in G$

$$1 + e = e + 1 = 1$$

Andaikan $2 \in G$

$$2 + e = e + 2 = 2$$

Andaikan $3 \in G$

$$3 + e = e + 3 = 3$$

Andaikan $4 \in G$

$$4 + e = e + 4 = 4$$

Andaikan $5 \in G$

$$5 + e = e + 5 = 5$$

maka G ada unsur satuan atau identitas

d. Adanya unsur balikan atau invers

Ambil sebarang nilai dari G andaikan $0 \in G$, pilih $0 \in G$,
sehingga $0 + 0 = 0 = e$, maka $(0)^{-1} = 0$

Ambil sebarang nilai dari G, andaikan $1 \in G$, pilih $5 \in G$,
sehingga $1 + 5 = 0 = e$, maka $(1)^{-1} = 5$

Ambil sebarang nilai dari G, andaikan $2 \in G$, pilih $4 \in G$,
sehingga $2 + 4 = 0 = e$, maka $(2)^{-1} = 4$

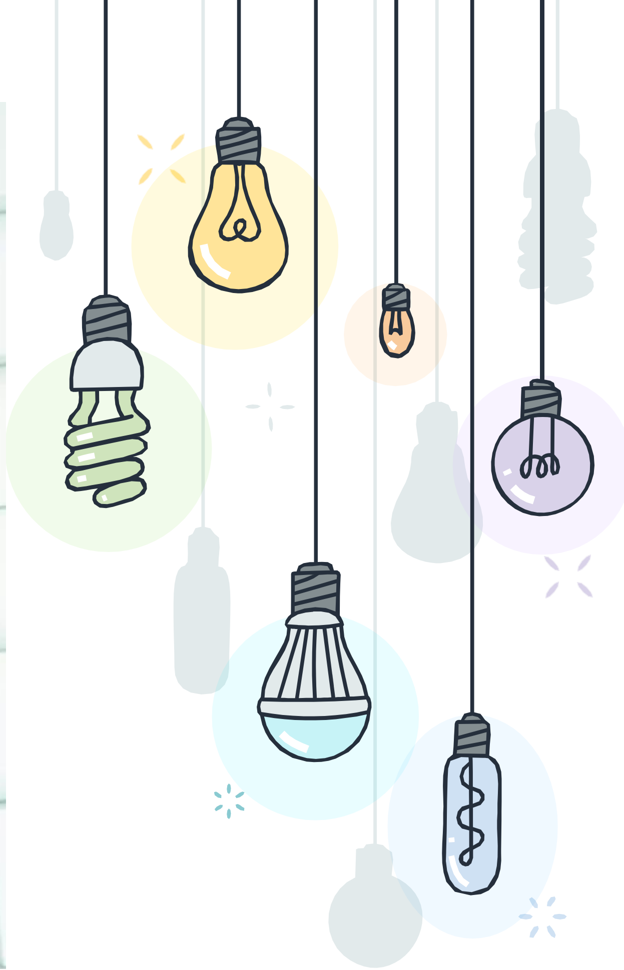
Ambil sebarang nilai dari G, andaikan $3 \in G$, pilih $3 \in G$,
sehingga $3 + 3 = 0 = e$, maka $(3)^{-1} = 3$

Ambil sebarang nilai dari G, andaikan $4 \in G$, pilih $2 \in G$,
sehingga $4 + 2 = 0 = e$, maka $(4)^{-1} = 2$

Ambil sebarang nilai dari G, andaikan $5 \in G$, pilih $1 \in G$,
sehingga $5 + 1 = 0 = e$, maka $(5)^{-1} = 1$

maka G ada unsur balikan atau invers

Jadi, $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ merupakan Grup terhadap penjumlahan $(G, +)$.



Contoh

- Himpunan bilangan bulat positif $\mathbb{Z}^+$ terhadap operasi penjumlahan bukanlah sebuah grup.
- Himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ bukan grup terhadap operasi +.
- Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi perkalian biasa bukanlah sebuah grup.
- Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi pengurangan bukanlah sebuah grup.

Sifat-sifat Sederhana dalam grup

Dalam pembahasan terdahulu telah dicatat bahwa sebagai akibat definisi grup, sebarang persamaan $a * x = b$ mempunyai penyelesaian dalam suatu grup yaitu $x = a' * b$. Sifat-sifat sederhana yang lain dinyatakan sebagai berikut.

1. Hukum kanselasi kiri : jika $a.x = a.y$ maka $x = y$.
2. Hukum kanselasi kanan : jika $x.a = y.a$ maka $x = y$.
3. Elemen identitas itu tunggal yaitu jika e dan e' elemen G yang memenuhi hukum identitas maka $e = e'$.
4. Invers dari sebarang elemen G akan tunggal yaitu jika a dan b merupakan invers dari x maka $a = b$.
5. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Bukti:

Diberikan $a.x = a.y$

Karena G grup dan $a \in G$ maka terdapat a^{-1} sehingga

$a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$

Dengan e identitas. Akibatnya

$a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay)$

Dan dengan menggunakan hukum assosiatif diperoleh

$(a^{-1}a)x = (a^{-1}a)y$

Dan dengan hukum invers diperoleh

$ex = ey$

Akhirnya dengan hukum identitas $x = y$.

Bukti:

Diberikan $x.a = y.a$

Karena G grup dan $a \in G$ maka terdapat a^{-1} sehingga

$a^{-1}.a = a.a^{-1} = e$

Dengan e identitas. Akibatnya

$(xa)a^{-1} = (ya)a^{-1}$

Dan dengan menggunakan hukum assosiatif diperoleh

$x(a^{-1}a) = y(a^{-1}a)$

Dan dengan hukum invers diperoleh

$xe = ye$

Akhirnya dengan hukum identitas $x = y$.

Bukti:

Karena e suatu anggota identitas maka $ee' = e'$.

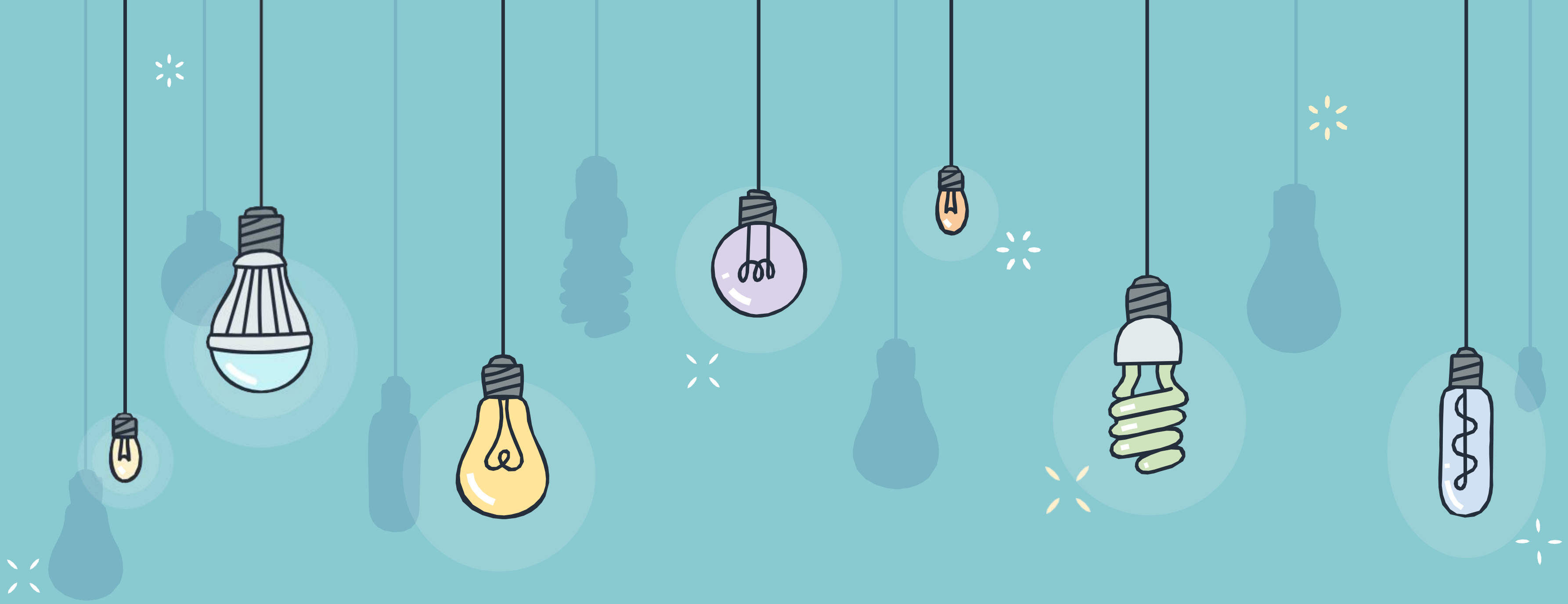
Pada sisi lain $ee' = e'$, sehingga $ee' = e' = e$,

Bukti:

Karena a dan b merupakan invers x maka berlaku $xa = e$ dan $xb = e$. Karena elemen identitas itu tunggal maka $xa = e = xb$. Akibatnya dengan menggunakan hukum kanselasi kiri maka $a = b$.

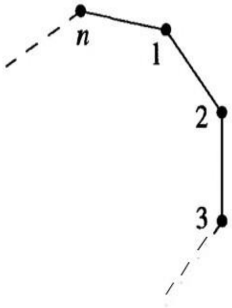
Bukti:

Karena
$ab.b^{-1}a^{-1} = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$
Dan
$b^{-1}a^{-1}.ab = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$
Maka $(ab)^{-1}= ba$..



1.2 GROUPS DIHEDRAL

Grup dihedral D_n yaitu grup permutasi yang mempertahankan bentuk geometri segi-*n* ditandai oleh 1, 2, 3,…,*n.* ada tetap *n* pilihan untuk menggantikan titik pertama. Bila titik yang pertam diganti oleh *i* maka titik kedua digani oleh *i* + 1 atau *i* – 1. jadi ada 2_n kemungkinan pengganti dari titik sudut segi-*n* beraturan supaya tetap mempertahankan bentuk. Jadi grup D_n mempunyai order sebanyak 2_n.



jika *s* adalah rotasi $\frac{2\pi}{n}$ radian searah jarum jam terhadap pusat *n-gon*, maka σ adalah permutasi yang mengirimkan *i* ke *i* + 1, $1 \leq i \leq n-1$, dan $\sigma(n) = 1$. Sekarang buat D_{2n} ke dalam grup dengan mendefenisikan $s, t \in D_{2n}$, menjadi simestri yang diperoleh

Teorema

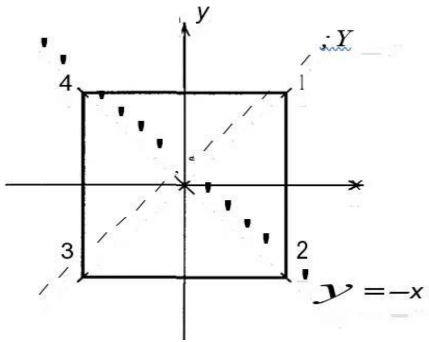
- Grup dehedral D_n untuk $n \geq 3$ terdiri dari semuah hasil kali dua elemen rotasi r dengan pencerminan s yang memenuhi: $r^n = e, s^2 = e$ dan $srs = r^{-1}$ dengan e adalah elemen netral.

bukti

- Ada n kemungkinan rotasi: $0°, \frac{360°}{n}, 2\frac{360°}{n}, \ldots, (n-1)\frac{360°}{n}$. Dalam hal ini rotasi $r = \frac{360°}{n}$. Rotasi r ini membangun semua rotasi yaitu: $r^k = k\left(\frac{360°}{n}\right), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Selanjudnya n pencerminan di notasikan oleh $s_1, s_2, \ldots, s_n$, yang mana s_k menyatakan pencerminan yang menyebabkan titik sudut ke-k. tetap. Ada dua kasuspencerminan bergantung pada n genap atau ganjil. Bila genap, maka ada dua titik tetap terhadap terhadap pencerminan. Bila ganjil, maka ada satu titik tetap terhadap pencerminan. Jadi bila $n = 2_m$, maka $s_i = s_{i+m}$ untuk $1 \leq i \leq m$. Order s_k adalah dua untuk semua K. misalkan $s = s_1$, maka $s^2 = e$ dan $r^n = e$. Bila titik sudut pertama k dan titik sudut kedua oleh $k+1$, maka hal ini dilakukan oleh rotasi r^k, tetapi bila titik sudut pertama di ganti oleh k dan dan titik sudut kedua oleh $k-1$ maka hasil ini di lakukan oleh perkalian $r^k s$. Hal ini menunjukan bahwa $D_n = \quad r, s \quad$.

Penjelasan serupa didapat $srs = r^{-1}$



Contoh

Grup dihedral segi empat beraturan D_4 dengan rotasi di berikan oleh $r = (1,2,3,4)$; $r^2 = (1,3)(2,4)$, $r^3 = (1,4,3,2)$, $r^0 = 0$ dan pencerminan

diberikan oleh $s_1 = (2,4)$ dan $s_2(1,3)$. Dua elemen lainnya adalah $rs_1 = (1,2)(3,4)$ dan $r^3 s_1 = (1,4)(2,3)$.

$$D_4 = \langle\{r,s\}\rangle = \{r^i . s^j \mid i,j \in z\}$$
$$r = (1,2,3,4) \leftrightarrow |r| = 4$$
$$s = (2,4) \leftrightarrow |s| = 2$$

Grup simetri

Permutasi

Misalkan Ω suatu himpunan tak hampa dan $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ suatu pemetaan.

Pemetaan σ disebut **permutasi** pada Ω jika pemetaan satu-satu atau bersifat bijektif.

Note!

- Jika | Ω | = n, n ∈ Z +, maka grup Sim (S) dinotasikan S_n
- $|S_n|$ = n! , sehingga ada n! Elemen dalam S_n

Grup Simetri

Misalkan **Ω** sembarang himpunan tak kosong dan S_Ω himpunan semua pemetaan dari **Ω** ke dirinya sendiri.

Sim (**Ω**) = {σ ∈ S_Ω | σ adalah permutasi pada **Ω**}

Himpunan Sim (**Ω**) terhadap operasi komposisi pemetaan membentuk struktur grup, atau

Jika semua aksioma grup berlaku untuk (Sim (**Ω**), *o*), maka

Grup Sim (**Ω**) disebut grup simetri pada himpunan **Ω**.

Setiap subgrup dari grup Sim (**Ω**) disebut grup permutasi.

Penyajian permutasi

Permutasi dapat dinyatakan dengan matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Permutasi tersebut memetakan 1 ke σ (1), 2 ke σ (2), hingga n ke σ (n).

Contoh:
Lihat grup simetri S_3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

menyatakan permutasi yang memetakan 1 ke 3, 2 ke 1 dan 3 ke 2.

Komposisi dua permutasi

Misalkan $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}$ dan $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

adalah dua buah permutasi pada S.
Komposisi permutasi σ dan τ , ditulis: σ o τ , adalah

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \cdots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$$

Contoh Komposisi dua permutasi

Misalkan $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ adalah dua buah permutasi pada S.

Komposisi permutasi σ dan τ, ditulis: $\sigma \circ \tau$, adalah

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \sigma(\tau(3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma(\tau(1)) &= \sigma(2) = 1 \\ \sigma(\tau(2)) &= \sigma(3) = 2 \\ \sigma(\tau(3)) &= \sigma(1) = 3. \end{aligned}}$$

Contoh Grup simetri S_3

Misalkan S_3 menyatakan himpunan dari semua fungsi satu-satu dari $\{1,2,3\}$ ke dirinya sendiri. S_3 ini akan membentuk grup dengan beberapa elemen terhadap operasi komposisi. Elemen S_3 ini adalah *$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$+, dengan

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian, dari uraian di atas diperoleh $S_3 =$ *$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$+ yang merupakan **grup simetri** terhadap operasi komposisi fungsi.

Permutasi dalam bentuk siklus

Misalkan $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ dan $\sigma \in S_n$. Permutasi σ dapat ditulis dalam bentuk siklus dengan langkah berikut.

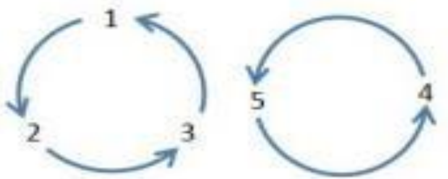
- Ambil unsur $1 \in S$.
- Lihat nilai $\sigma(1), \sigma(\sigma(1)), \cdots, \sigma(\cdots\sigma(1))$ pada permutasi σ sampai diperoleh nilai $\sigma(\cdots\sigma(1)) = 1$.
- Jika $\sigma(1) = a_1, \sigma(\sigma(1)) = a_2, \cdots, \sigma(\cdots\sigma(1)) = a_k$, maka diperoleh satu buah siklus dari permutasi σ yang dimulai dari 1, yaitu $(1\ a_1\ a_2\ \cdots\ a_{k-1})$.
- Jika $k = n$, maka hanya diperoleh satu buah siklus sehingga $\sigma = (1\ a_1\ a_2\ \cdots\ a_{k-1})$.
- Jika $k < n$, ulangi proses dari awal untuk semua anggota S yang belum masuk ke dalam siklus sehingga diperoleh $\sigma = (1\ a_1\ a_2\ \cdots\ a_{k-1})(a_{k+1}\ a_{k+2}\cdots)\cdots$.

Catatan:
Pengambilan anggota S pada langkah awal tidak harus dimulai dari 1.

Contoh Permutasi dalam bentuk siklus

Ambil permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)\,(4\ 5).$$



Siklus pada permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Hasil dari semua siklus disebut **dekomposisi siklus.**
Panjang suatu siklus adalah banyaknya bilangan bulat yang muncul di dalamnya. Siklus dengan panjang t disebut t-siklus. Dua siklus disebut ***disjoin*** jika tidak memiliki bilangan yang sama.

Jadi elemen σ di atas adalah hasil dari 2 disjoin siklus: 3-siklus dan 2-siklus.

Contoh lain untuk menghitung dekomposisi siklus dari elemen σ pada S_n

Misalkan: $n = 13$ dan $\sigma \in S_{13}$ didefinisikan oleh

$$\sigma(1) = 12, \quad \sigma(2) = 13, \quad \sigma(3) = 3, \quad \sigma(4) = 1, \quad \sigma(5) = 11,$$
$$\sigma(6) = 9, \quad \sigma(7) = 5, \quad \sigma(8) = 10, \quad \sigma(9) = 6, \quad \sigma(10) = 4,$$
$$\sigma(11) = 7, \quad \sigma(12) = 8, \quad \sigma(13) = 2.$$

Proses ini berhenti ketika semua angka dari *1, 2, . . . , 13+ telah muncul dalam beberapa siklus. Untuk σ tertentu dalam contoh ini diberikan

$$\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(3)(5\ 11\ 7)(6\ 9)$$

Langkah terakhir Algoritma Dekomposisi Siklus (lanjutan) yaitu

Final Step: Hapus semua siklus dengan panjang 1

Oleh karena itu, dekomposisi siklus untuk σ tertentu dalam contoh adalah

$$\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(5\ 11\ 7)(6\ 9)$$

Thanks!

Any questions?