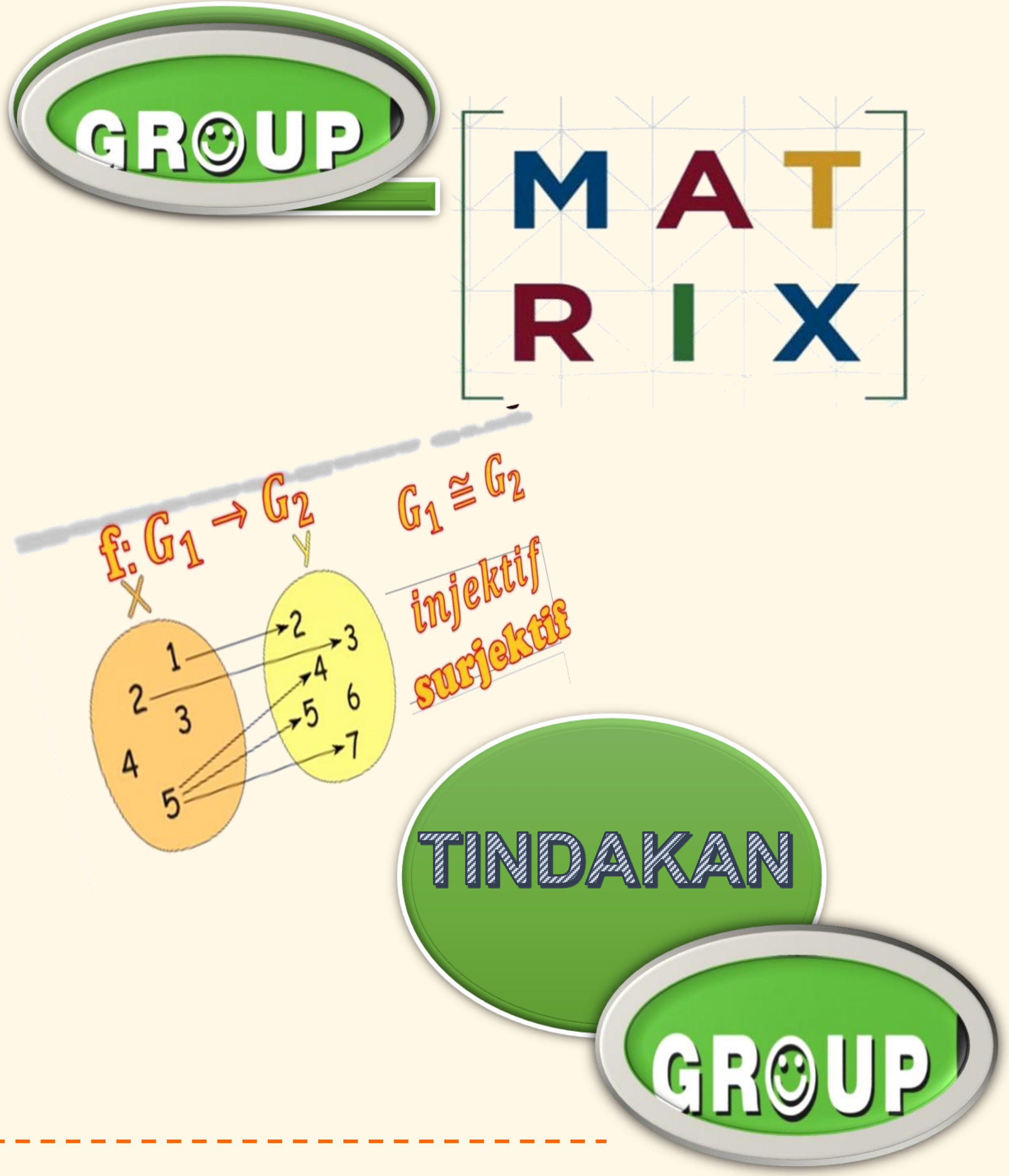
TEORI GRUP

- ★ Grup Matriks
- ★ Grup Quartenion
- ★ Homomorfism & Isomorfism
- ★ Tindakan Grup



GROUP

MATRIX

DEVENIsi

- Sebuah bidang adalah himpunan F yang digabungkan dengan dua operasi biner + dan . di F sedemikian sehingga (F,+) adalah grup abelian (disebut identitasnya 0) dan (F-{0},.) adalah juga merupakan grup abelian, dan hukum distributif berlaku:

  $a.(b+c)=(a.b)+(a.c), \forall a,b,c \in F$

- untuk sembarang lapangan F misalkan F^x=F-{0}

CONTOH 1

$$1)\ M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} aij \in \mathbb{R} \right\}, tunjukan\ bahwa\ (\mathbb{R}, *)\ dengan\ operasi\ penjumlahan\ itu\ grup!$$

$$i)\ tertutup$$

$$(\forall a, b \in M_2\mathbb{R})\ A * B \in M_2\mathbb{R})$$

$$ambil\ sembarang\ A, B \in M_2\mathbb{R}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} \in \mathbb{R}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14} \in \mathbb{R}$$

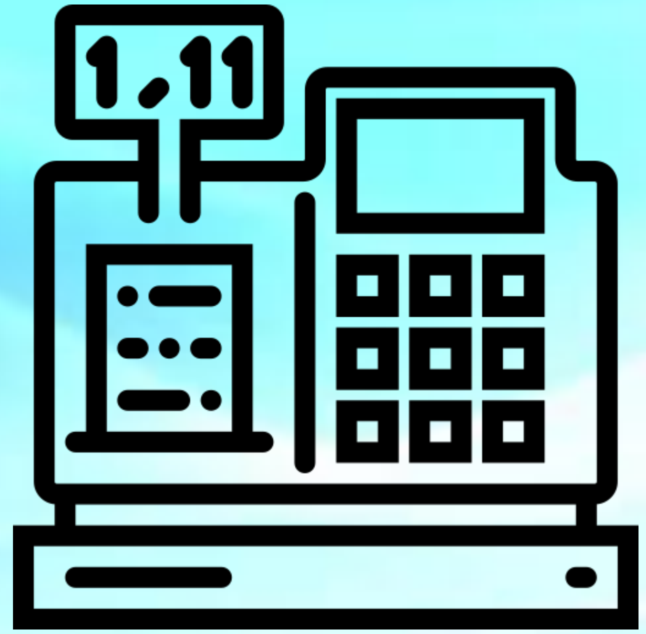
$$akan\ ditunjukan\ A + B \in M_2\mathbb{R}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}, aij, bij \in \mathbb{R}\ \ maka\ aij + bij \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \ cij \in (\mathbb{R})$$



ASOSIATIF

$$(\forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R}), (A * B) * C = a * (B * C)$$

$$\textit{ambil sembarang } A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$\textit{akan ditunjukan } (A * B) * C = A * (B * C)$$

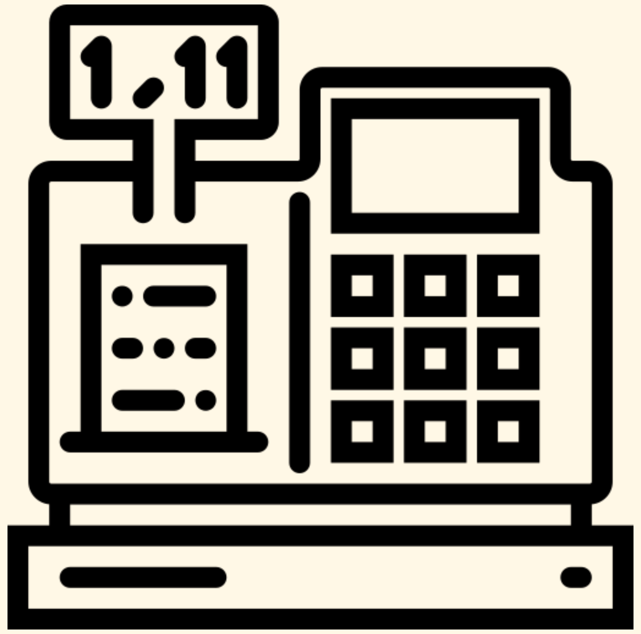
$$= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) + c_{11} & (a_{12} + b_{12}) + c_{12} \\ (a_{21} + b_{21}) + c_{21} & (a_{22} + b_{22}) + c_{22} \end{bmatrix} \textit{karena berlaku sifat asosiatif di } \mathbb{R} \ (aij + bij) + cij = aij + (bij + cij)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= A + (B + C)$$



distributif kiri

$$ambil\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

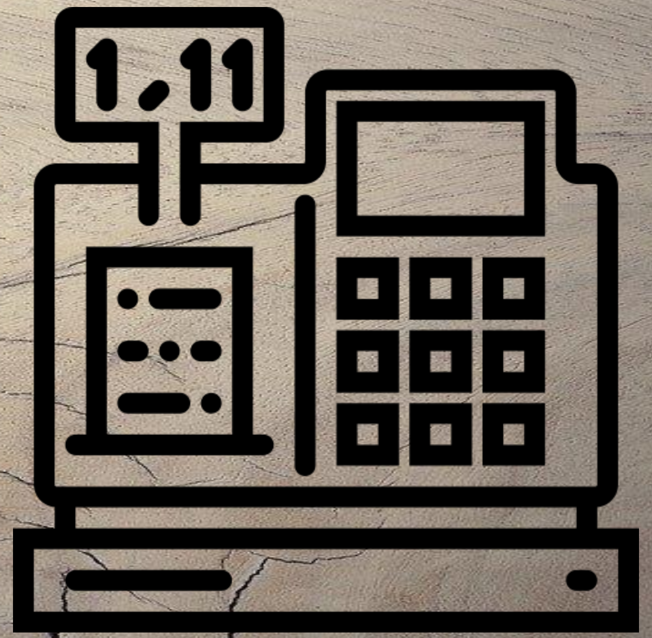
$$=A(B+C)=AB+AC$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11}c_{11} & a_{12}c_{21} & a_{12}c_{12} & a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} & a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} & a_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$=A \quad B \quad + \quad AC$$



distributif kanan

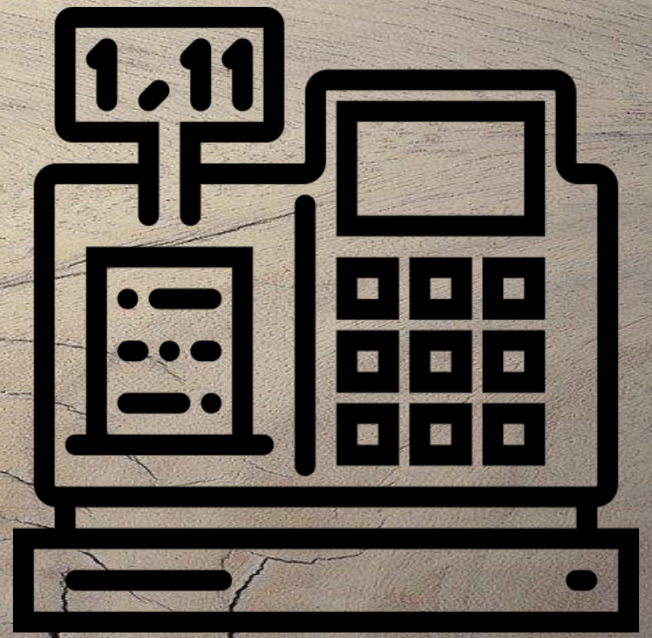
$$ambil\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$=(A+B)C=AC+BC$$

$$(A+B)C=\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}c_{11} & a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} & a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} & a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} & a_{22}c_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11}c_{11} & b_{12}c_{21} & b_{12}c_{12} & b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} & b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} & b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

$$=AC+BC$$



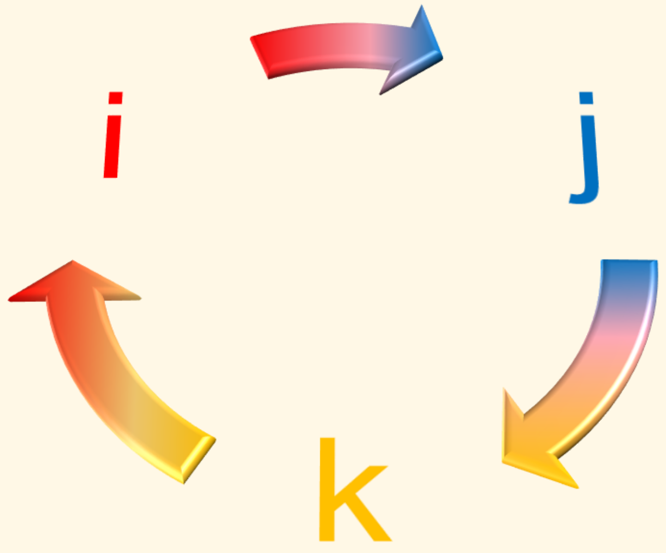
DEVENIsi 2

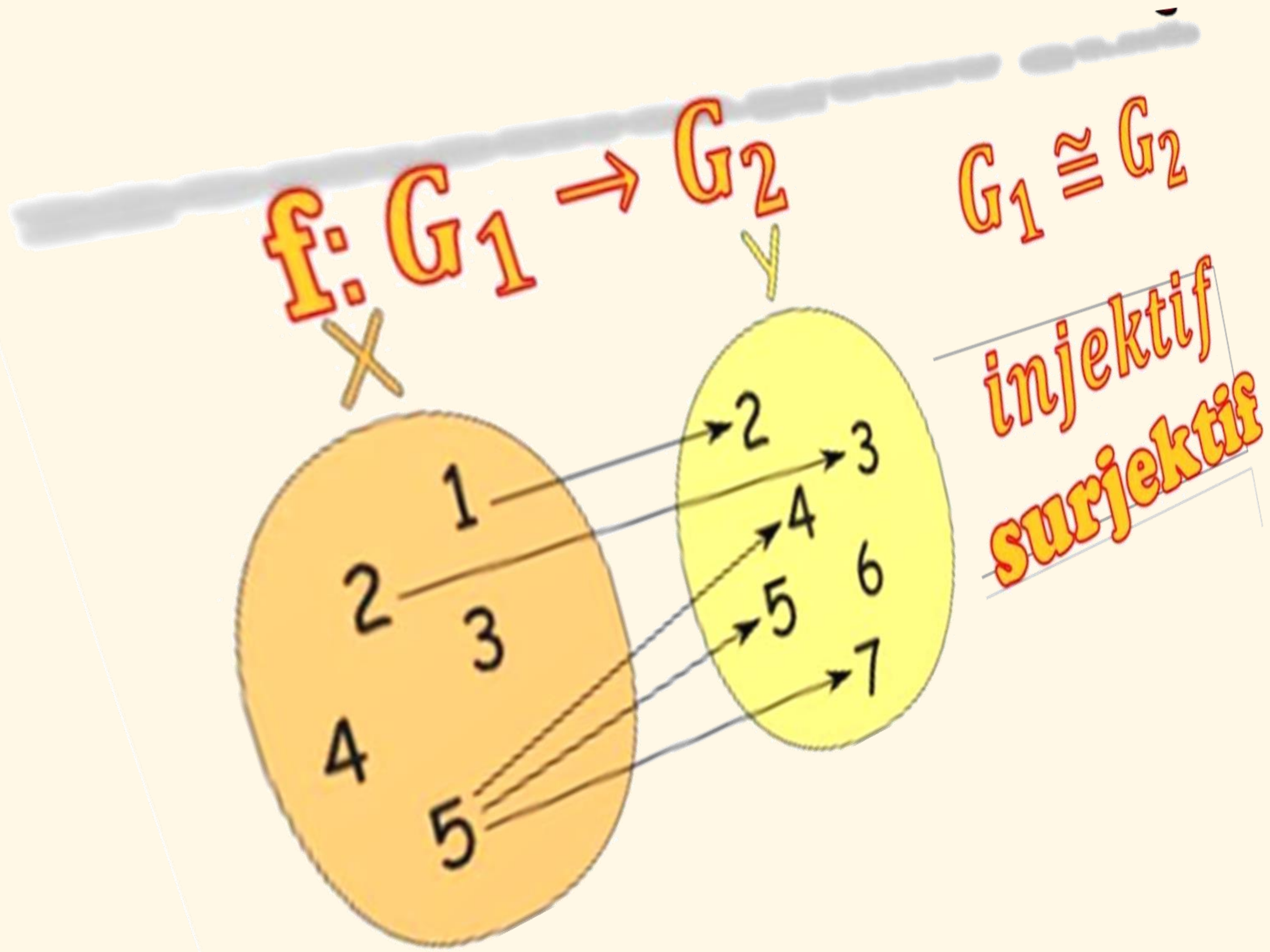
Grup quaternion adalah grup dengan 8 elemen $\boldsymbol{Q8}$ didefinisikan sebagai :

$$Q_8 = \{e, -e, i, -1, j, -j, k, -k\}$$

Dibawah operasi (.) sehingga :

$$e.a = a.e = a, \forall a \in Q_8$$
$$(-e).(-e) = e, (-e).a = a.(-e) = -a, \forall a \in Q_8$$
$$i.i = j.j = k.k = -e$$
$$i.j = k, j.l = -k$$
$$j.k = i, k.j = -i$$
$$k.i = j, i.k = -j$$





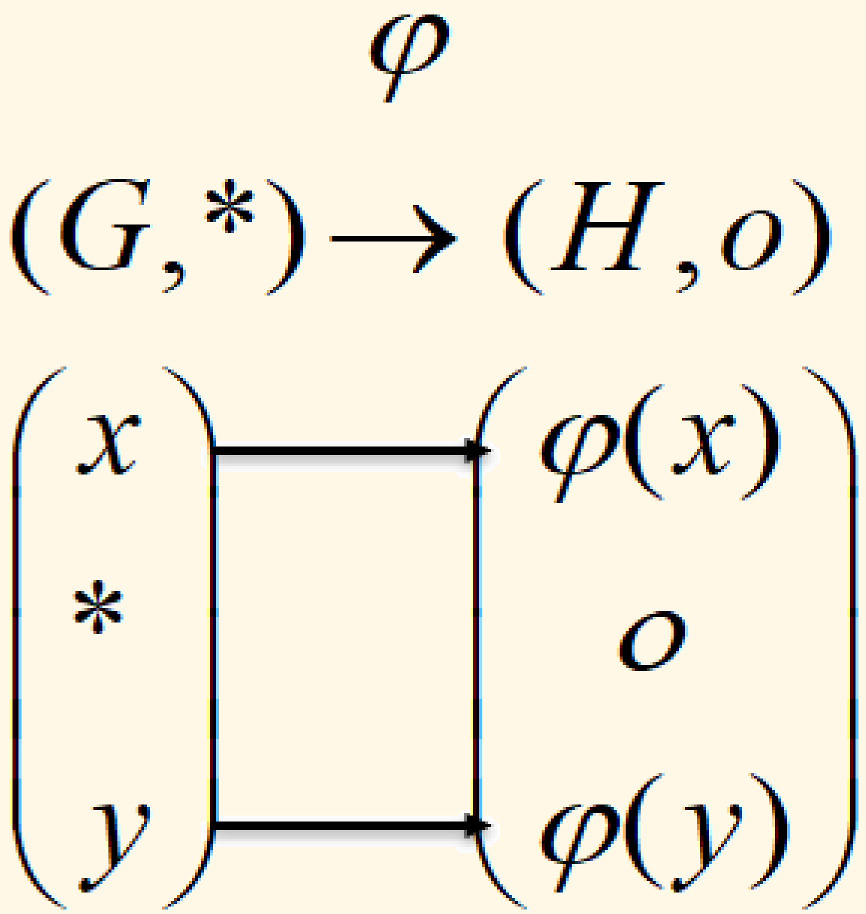
HOMOMORFISME
&
ISOMORFISMA

Pada bagian ini kita membuat gagasan yang tepat tentang kapan dua kelompok "terlihat sama," yaitu, memiliki struktur teori kelompok yang persis sama. Ini adalah gagasan tentang isomorfisme antara dua kelompok. Pertama-tama kita mendefinisikan gagasan homomorfisme yang akan kita katakan lebih banyak lagi nanti.

DEVENIsi

Misalkan $(G,*)$ dan $(H,\ \diamond)$ adalah grup. A map $\varphi: G \to H$ menunjukkan bahwa

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \diamond \varphi(y), \forall x, y \in G \ \textit{disebut homomorphism}.$$



DEVENIsi

Misalkan G dan G’ masing” adalah grup dan
φ adalah suatu homomorfisma dari G ke G′maka

i. Homomorfisma φ disebut epimorfisma jika φ adalah pemetaan surjektif

ii. Homomorfisma φ disebut monomorfisma jika φ adalah pemetaan injektif

iii. Homomorfisma φ disebut isomorfisma jika φ adalah pemetaan bijektif

G dikatakan isomorfis dengan grup G’ $(G \cong G)$
jika terdapat isomorfisma dari G ke G′ atau sebaliknya

$misalkan\, G\, adalah\, grup\, (M_{2x2}(R),+)\, dan\, G'\, adalah\, Grup\, (R,+)$

$didefinisikan\, \varphi : G \to G'$

$$\varphi : M_{2x2}(R) \to R \qquad \varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a+b$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to a+b$$

$$ambil\ sembarang \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M_{2x2}(R)$$

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \left(a_1+a_2\right) + \left(d_1+d_2\right) \\
&= (a_1+d_1)+(a_2+d_2) \\
&= \varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$\therefore Homomorfism$

DEVENIsi

Sebuah pemetaan $\varphi: G \to H$ disebut *isomorfisme* dimana G dan H dikatakan isomorfik atau sama *tipe isomorfisme,* ditulis $G \cong H$, jika

- φ adalah homomorfism $(i.e.,)$ $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y))$
- φ adalah bijeksi.

Misalkan B = {0, 1, 2} adalah himpunan bilangan bulat modulo 3.B terhadap penjumlahan modulo 3 merupakan suatu grup. G = {R, R2, R3 = 1} yaitu suatu grup operasi simetri dari segitiga samasisi dengan R adalah rotasi terhadap pusat segitiga dengan sudut putar 120^0.

Jadi φ suatu homomorfisme, nampak bahwa φ adalah suatu pemetaan satu-satu

dan onto, maka φ suatu isomorfisme. Jadi B isomorfik dengan G dapat dinotasikan $B \cong G$.

Teorema 1

Misalkan $(G,\circ)$ isomorfik pada grup $(G',*)$ dan $f : G \to G$' adalah isomorfisme maka peta identitas di G adalah identitas di G'.

Bukti; Misal e adalah identitas di G maka f(e) adalah identitas di G', $\forall\, a \in G'$ maka berlaku

$$a' * f(e) = f(e) * a' = a'$$

Jika $a' \in G'$ maka f adalah fungsi satu-satu, sehingga $\exists\, a \in G$ maka $f(a) = a'$,

a dan e elemen G. Jadi $a \circ e = e \circ a = a$.

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Tabel $(B, +_3)$

$+_3$	I	R	R^2
I	I	R	R^2
R	R	R^2	I
R^2	R^2	I	R

Tabel $(G,\circ)$

Pemetaan $\varphi : B \to G$ didefinisikan oleh $\varphi(0) = I$, $\varphi(1) = R$, dan $\varphi(2) = R^2$

$\varphi(1+2) = \varphi(0) = I = R.R^2 = \varphi(1).\varphi(2)$

$a \circ e = a \to f(a \circ e) = f(a)$

$\to f(a) * f(e) = f(a)$

$\to a' * f(e) = a'$ ...1)

$e \circ a = a \to f(e \circ a) = f(a)$

$\to f(e) * f(a) = f(a)$

$\to f(e) * a' = a'$ ...2)

Sehingga dari 1 dan 2 didapatkan $a' * f(e) = f(e) * a' = a', \forall\, a' \in G$

Teorema 2

Misalkan grup $(G,\circ)$ isomorfik pada grup $(G',*)$ dan $f: G \to G'$ maka peta invers pada elemen G adalah invers pada elemen f sehingga $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall\, a \in G$

Bukti:

Misal $a \in G$ dan e identitas di G, maka

$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

$a \circ a^{-1} = e \to f(a \circ a^{-1}) = f(e)$

$\to f(a) * f(a^{-1}) = f(e)$ ...1)

$a^{-1} \circ a = e \to f(a^{-1} \circ a) = f(e)$

$\to f(a^{-1}) * f(a) = f(e)$ ...2)

Sehingga $f(a) * f(a^{-1}) = f(a^{-1}) * f(a) = f(e)$

Jadi e identitas G dan *f(e)* identitas G' sehingga $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$

Dengan kata lain, kelompok G dan H isomorfik jika ada bijeksi di antara mereka yang mempertahankan operasi kelompok. Secara intuitif, G dan H adalah kelompok yang sama kecuali bahwa elemen dan operasi dapat ditulis secara berbeda dalam G dan H. Dengan demikian setiap properti yang dimiliki G yang hanya bergantung pada struktur kelompok G (i.e., dapat berasal dari aksioma kelompok misalnya, komuteritas kelompok) juga berlaku di H. Perhatikan bahwa ini secara resmi membenarkan semua penulisan kami sebagai operasi grup $\cdot$ karena mengubah simbol operasi tidak mengubah jenis isomorfisme.

untuk sembarang grup G, $G \cong G$. pemetaan identitas memberikan isomorfisme yang jelas tetapi secara umum, satu- *satunya* isomorfisme dari G ke dirinya sendiri. Secara umum, misalkan G adalah himpunan yang tidak kosong dari grup. Sangat mudah untuk memeriksa bahwa relasi $\cong$ tersebut merupakan relasi ekivalensi pada G dan kelas ekivalensi disebut kelas isomorfisme Ini dipimpin. menjelaskan isomorfisme penggunaan kata yang agak definisi simetris".

Peta eksponensial $exp: R \to R^+$ didefenisikan oleh $exp(x) = e^x$ di mana e adalah basis dari logaritma natural, adalah isomorfisme dari $(R, +)$ ke $(R^+, \times)$. Exp adalah bijeksi karena memiliki fungsi invers (yaitu log_e) dan $exponensi$ mempertahankan operasi grup karena $e^{x+y} = e^x e^y$. Dalam contoh ini baik elemen maupun operasinya berbeda tetapi kedua grup tersebut bersifat isomorfik yaitu sebagai grup yang memiliki struktur yang identic.

Dalam contoh ini kami menunjukkan bahwa tipe isomorfik dari grup simetris bergantung hanya_pada kardinalitas dari himpunan dasar yang di permutasi

Misalkan Δ dan Ω adalah himpunan tak kosong. Grup simetri S_Δ dan S_Ω. isomorfik jika $|\Delta| = |\Omega|$. Kita dapat melihat intuitif ini sebagai berikut: diberikan $|\Delta| = |\Omega|$, adalah bijektif θ.dari Δ untuk Ω. Pikirkan elemen dari Δ dan Ω direkatkan melalui θ, yaitu, masing-masing $x \in \Delta$ adalah direkatkan ke $\theta(x) \in \Omega$. Untuk mendapatkan peta $\varphi: S_\Delta \to S_\Omega$ misalkan $\sigma \in S_\Delta$ adalah permutasi dari Δ dan misalkan $\varphi(\sigma)$ adalah permutasi dari Ω yang menggerakkan elemen Ω dengan cara yang sama σ bergerak elemen terpaku yang sesuai dari Δ; yaitu, jika $\sigma(x) = y$, untuk beberapa $x, y \in \Delta$, maka $\varphi(\sigma)(\theta(x)) = \theta(y)$ dalam Ω. Karena himpunan θ bijektif. memiliki invers, seseorang dapat dengan mudah memeriksa apakah peta antara grup simetris juga memiliki invers. pemeriksaan properti yang memastikan φ adalah isomorfisme diturunkan kebijeksi latihan berikut.

Sebaliknya, jika $S_\Delta \cong S_\Omega$, maka $|\Delta| = |\Omega|$; kita membuktikan ini hanya ketika yang mendasari himpunan terbatas (ketika Δ dan Ω adalah himpunan tak terbatas, buktinya lebih sulit dan akan diberikan sebagai latihan di Bab 4). Karena setiap isomorfisme antara dua kelompok G dan H adalah, apriori, bijeksi diperlukan untuk isomorfisme adalah $|S_\Delta| = |S_\Omega|$. Jika Δ adalah himpunan terbatas dengan orde n, maka $|S_\Delta| = n!$. Kami sebenarnya hanya membuktikan ini untuk S_n, namun alasan yang sama berlaku untuk S_Δ. Demikian pula, jika Ω adalah himpunan terbatas berorde m, maka $|S_\Omega| = m!$. Jadi jika S_Δ dan S_Ω adalah isomorfik maka $n! = m!$, jadi $m = n$,yaitu, $|\Delta| = |\Omega|$.

Misalkan G_3 adalah subgrup dari himpunan simetri dari bidang segitiga beraturan bercabang n-segitiga beraturan. Ternyata anggota G_3 ini meliputi simetri putar (rotasi) dan simetri lipat (refleksi). Dan D_6 adalah grup dihedral-6 dengan operasi komposisi dimana $D_6 = \{r, r^2, 1, s, sr, sr^2\}$ dan $G_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ dengan:

α_1 = rotasi sejauh 120^0 searah dengan jarum jam

α_2 = rotasi sejauh 240^0 searah dengan jarum jam

α_3 = rotasi sejauh 360^0 searah dengan jarum jam

β_1 = refleksi terhadap sumbu S_1

β_2 = refleksi terhadap sumbu S_2

β_3 = refleksi terhadap sumbu S_3

Dalam hal ini $(G_3,\circ)$ isomorfik dengan $(D_6,\circ)$ karena ada korespondensi satu-satu dari $G_3 \rightarrow D_6$ sehingga dapat dibuat teorema sebagai berikut:

Teorema 1

Misalkan G_3 adalah subgrup dari himpunan simetri dari bidang segitiga beraturan bercabang n-segitiga beraturan dan D_6 adalah grup dihedral-6 maka $(G_3,\circ) \cong (D_6,\circ)$.

Bukti:

G_3 adalah subgrup dari himpunan simetri dari bidang segitiga beraturan bercabang n-segitiga beraturan, dimana $G_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ dengan:

α_1 = rotasi sejauh 120^0 searah dengan jarum jam

$= (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6) \ldots (\ldots) = 2^{n+1} - 1$

α_2 = rotasi sejauh 240^0 searah dengan jarum jam

$= (1\ 3\ 2)(4\ 6\ 5) \ldots (\ldots) = 2^{n+1} - 1$

α_3 = rotasi sejauh 360^0 searah dengan jarum jam

$= (1)\ (2)\ (3) \ldots (\ldots) = 3(2^{n+1} - 1)$

β_1 = refleksi terhadap sumbu S_1

$= (1)(2\ 3)(4\ 7) \ldots (\ldots) = 3 \cdot 2^n - 1$

β_2 = refleksi terhadap sumbu S_2

$= (1\ 3)(2)(4\ 9) \ldots (\ldots) = 3 \cdot 2^n - 1$

β_3 = refleksi terhadap sumbu S_3

$= (1\ 2)(3)(4\ 8) \ldots (\ldots) = 3 \cdot 2^n - 1$

$\circ$	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
α_1	α_2	α_3	α_1	β_3	β_1	β_2
α_2	α_3	α_1	α_2	β_2	β_3	β_1
α_3	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
β_1	β_2	β_3	β_1	α_3	α_1	α_2
β_2	β_3	β_1	β_2	α_2	α_3	α_1
β_3	β_1	β_2	β_3	α_1	α_2	α_3

Dari tabel cayley diatas dapat kita ketahui bahwa:

1. Operasi $\circ$ bersifat tertutup
2. Operasi $\circ$ bersifat assosiatif
3. G punya identitas terhadap operasi $\circ$ yaitu α_3
4. Setiap unsur di G punya invers terhadap operasi $\circ$ yaitu

$\alpha_3^{-1} = \alpha_3$ $\quad$ $\beta_1^{-1} = \beta_1$

$\alpha_1^{-1} = \alpha_2$ $\quad$ $\beta_2^{-1} = \beta_2$

$\alpha_2^{-1} = \alpha_1$ $\quad$ $\beta_3^{-1} = \beta_3$

$D_6 = \{r, r^2, 1, s, sr, sr^2\}$, dan $(D_6, \circ)$ juga merupakan grup

Grup dihedral-6 dapat disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

$\circ$	r	r^2	1	s	sr	sr^2
r	r^2	1	r	sr^2	s	sr
r^2	1	r	r^2	sr	sr^2	s
1	r	r^2	1	s	sr	sr^2
s	sr	sr^2	s	1	r	r^2
sr	sr^2	s	sr	$r2$	1	r
sr^2	s	sr	sr^2	r	r^2	1

Untuk menentukan isomorfisme, maka dibentuk pemetaan $\varphi : (G_3,\circ) \to (D_6,\circ)$ dengan didefinisikan sebagai berikut:

$\varphi(\alpha_1) = r$ atau dapat dikatakan bahwa α_1 pada grup permutasi segitiga bercabang 1-segitiga berkorespondensi satu-satu dengan r pada grup dihedral-6. Untuk selanjutnya pernyataan tersebut dinyatakan dengan:

$$(G_3,\circ) \approx (D_6,\circ)$$

$$\begin{array}{lcl}
\varphi(\alpha_1) = r & \text{atau} & \alpha_1 \leftrightarrow r \\
\varphi(\alpha_2) = r^2 & & \alpha_2 \leftrightarrow r^2 \\
\varphi(\alpha_3) = 1 & & \alpha_3 \leftrightarrow 1 \\
\varphi(\beta_1) = s & & \beta_1 \leftrightarrow s \\
\varphi(\beta_2) = sr & & \beta_2 \leftrightarrow sr \\
\varphi(\beta_3) = sr^2 & & \beta_3 \leftrightarrow sr^2
\end{array}$$

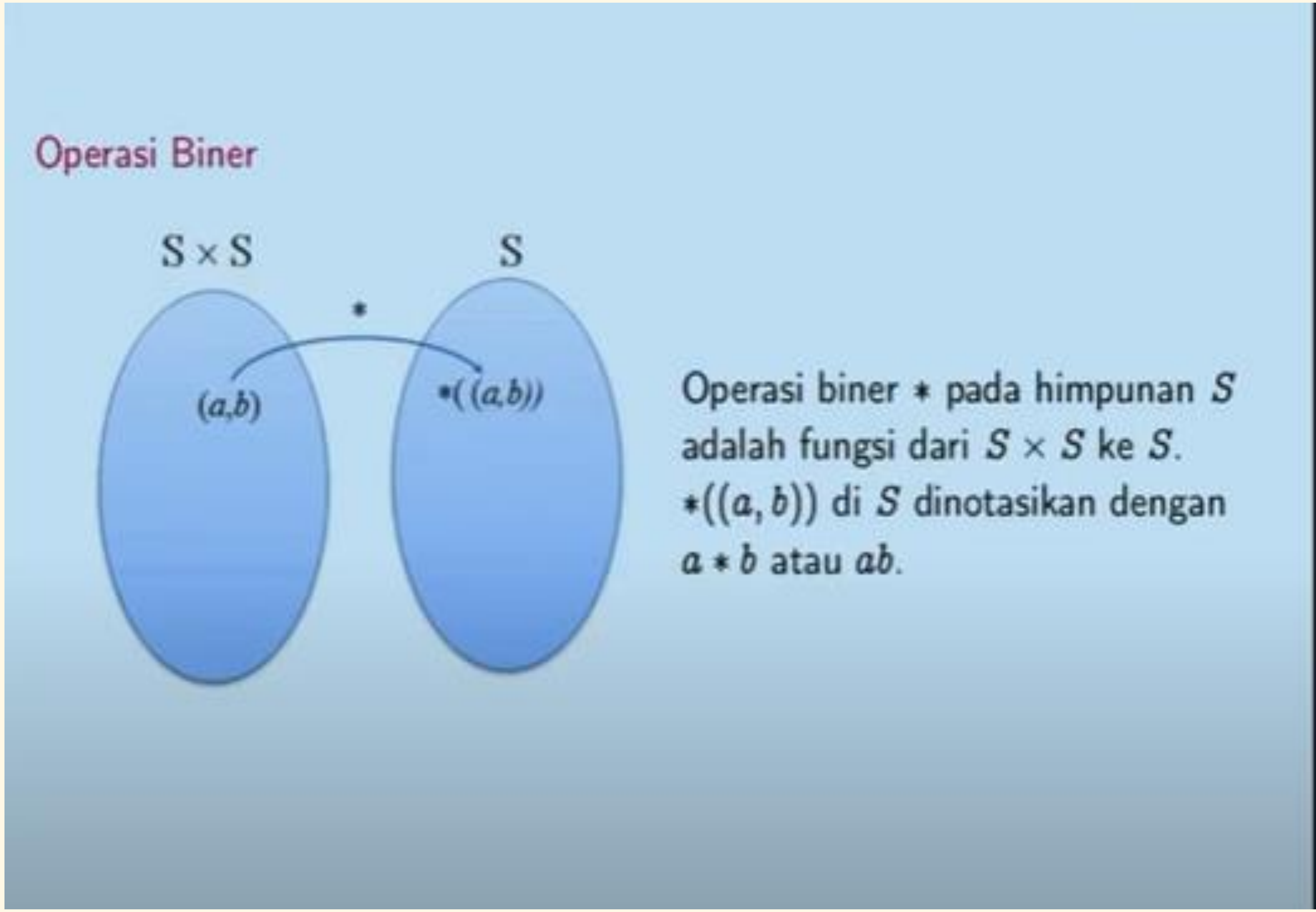
Jadi terbukti bahwa grup G_3 isomorfik dengan grup D_6, karena ada isomorfisme dari G_3 ke D_6.

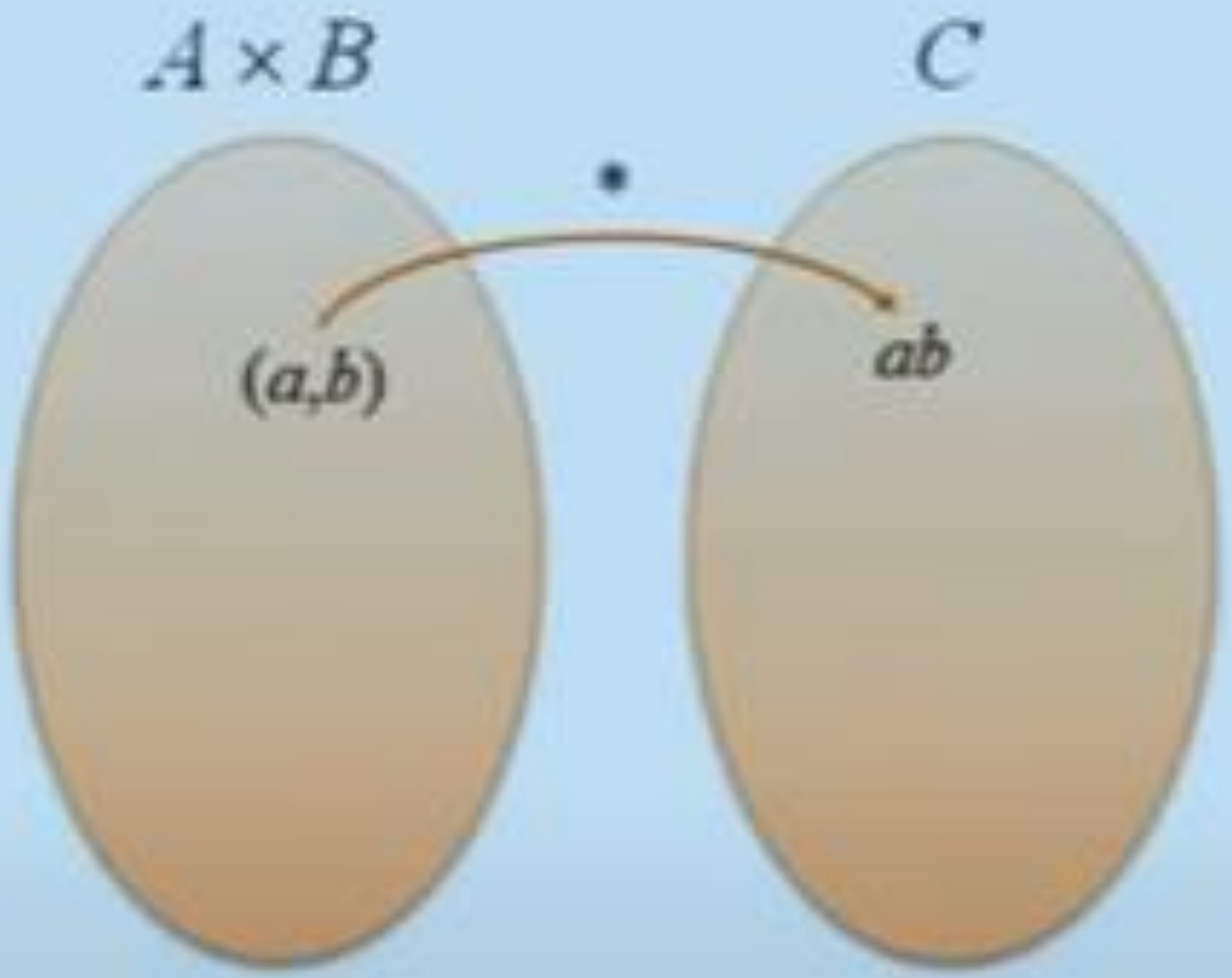
Action

GROUP

1.7 GRUP AKS

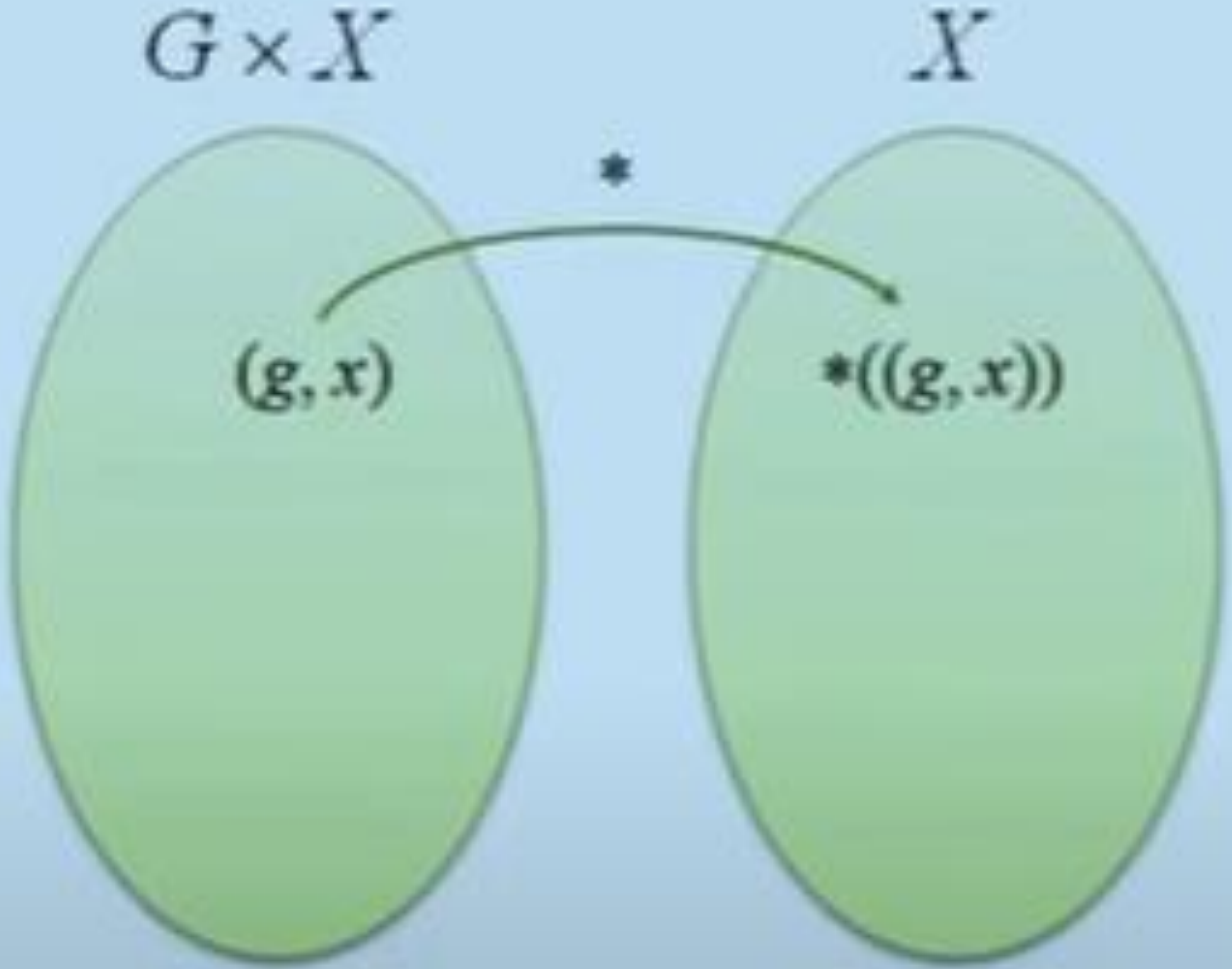
Ingat kembali operasi Biner!





Secara umum, jika diberikan himpunan A, B, dan C, maka dapat didefinisikan fungsi dari $A \times B$ ke C.

Diberikan himpunan X dan grup G.



$*((g, x))$ di X dinotasikan dengan $g * x$ atau gx.

Definisi Grup Aksi

Grup aksi dari grup G pada himpunan A adalah pemetaan dari $G \times A$ ke A (ditulis sebagai g.a, untuk semua $g \in G$ dan $a \in A$) memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $g_1.(g_2.a) = (g_1 g_2).a, \forall g_1, g_2 \in G, a \in A,$ dan
2. $1.a = a, \forall a \in A.$

Contoh.

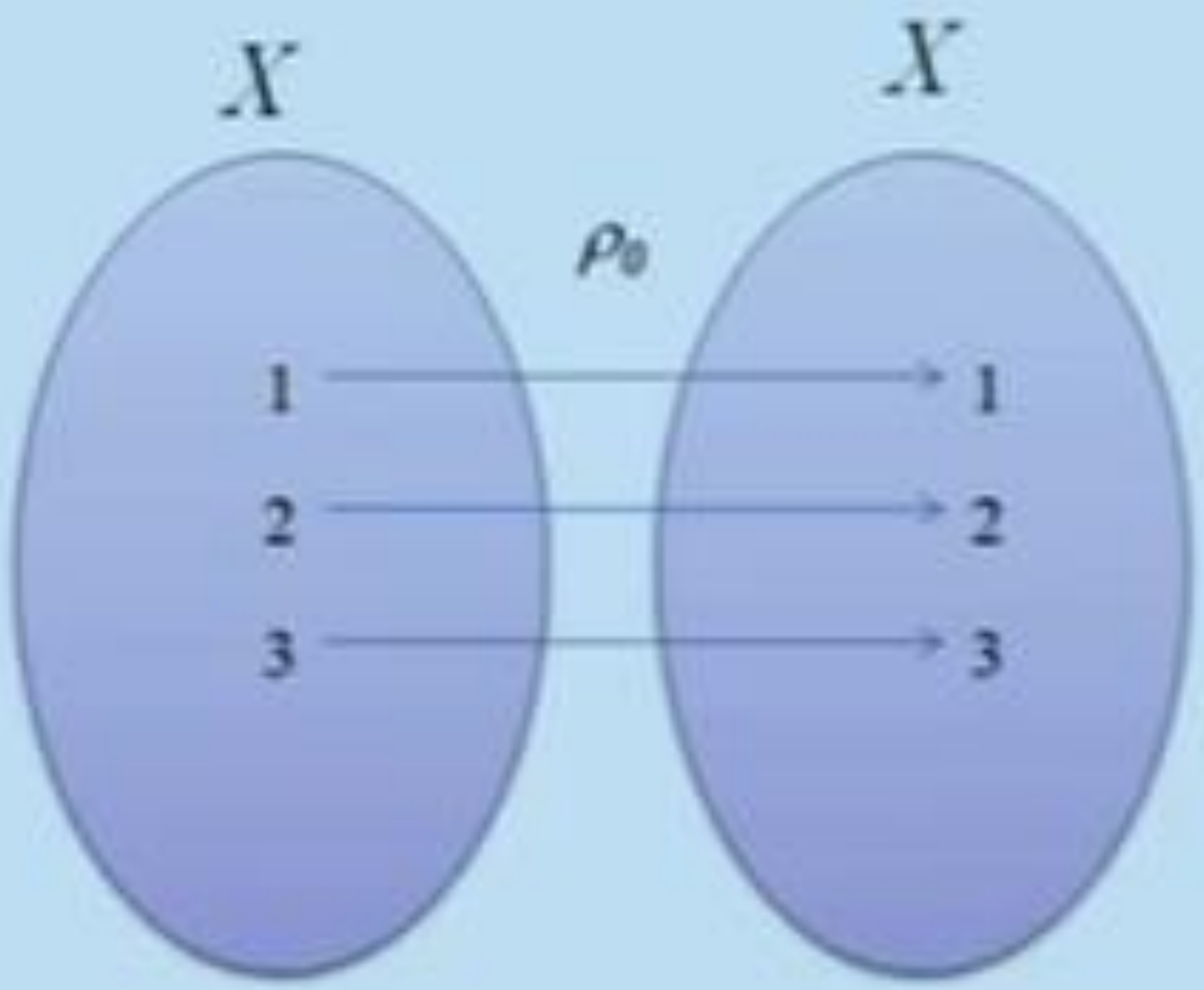
Diberikan

- $X = \{1, 2, 3\}$.
- $H = \left\{ \rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ subgrup S_3.
- Himpunan X merupakan H-set, dengan aksi dari $\sigma \in H$ pada X didefinisikan dengan:

$$\sigma x = \sigma(x),$$

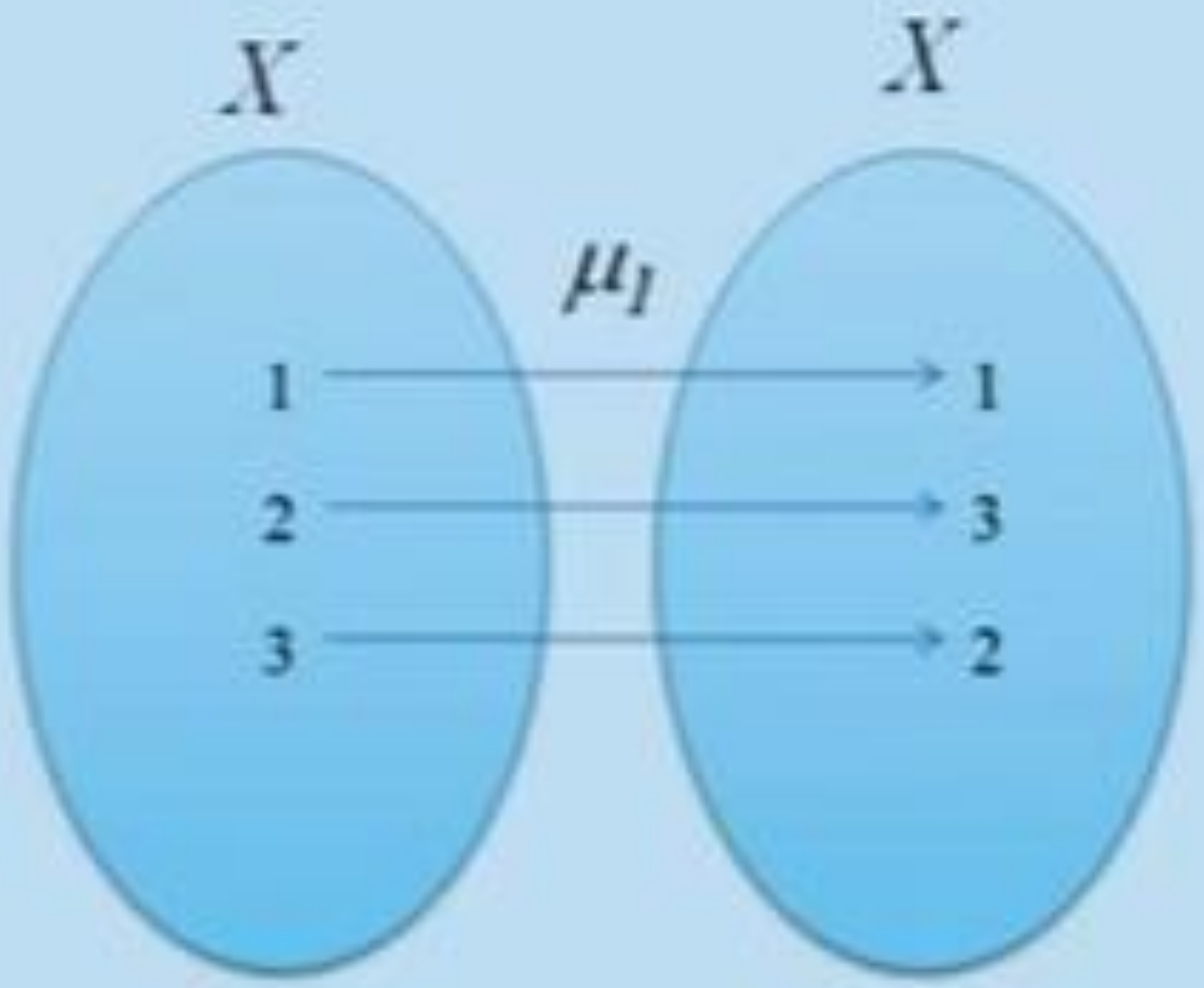
untuk setiap $x \in X$.

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in H.$$



- $\rho_0 1 = \rho_0(1) = 1$
- $\rho_0 2 = \rho_0(2) = 2$
- $\rho_0 3 = \rho_0(3) = 3.$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in H.$$



- $\mu_1 1 = \mu_1(1) = 1$
- $\mu_1 2 = \mu_1(2) = 3$
- $\mu_1 3 = \mu_1(3) = 2.$

Misalkan grup G bekerja pada himpunan A. Untuk setiap $g \in G$ kita mendapatkan pemetaan σ_g yang didefinisikan oleh

$$\sigma_g : A \to A$$

$$\sigma_g(a) = g.a$$

Kita buktikan dua aksi penting:

(i)untuk setiap $g \in G, \sigma_g$ adalah permutasi dari A, dan

(ii)Pemetaan dari G ke S_A yang didefinisikan oleh $g \to \sigma_g$ adalah homomorfisme.

Untuk melihat bahwa σ_g adalah permutasi dari A kita tunjukkan bahwa sebagai pemetaan himpunan dari A ke A memiliki 2 sisi, yaitu σ_{g-1}. $untuk\ \forall a \in A$

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g)(a) &= \sigma_{g^{-1}}(\sigma_g(a)) && \text{(menurut definisi komposisi fungsi)}\\
&= g^{-1}\cdot(g\cdot a) && \text{(menurut definisi } \sigma_{g-1}\ dan\ \sigma_g\text{)}\\
&= (g^{-1}g)\cdot a && \text{(menurut property (1) dari suatu tindakan)}\\
&= 1\cdot a = a && \text{(menurut property (2) dari suatu tindakan)}
\end{aligned}
$$

Ini membuktikan $(\sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g)$, adalah pemetaan identitas dari A ke A. Karena g adalah sembarang, kita dapat menukar peran g dan g^{-1} untuk mendapatkan $\sigma_g \circ \sigma_{g-1}$ juga merupakan pemetaan identitas pada A. Jadi σ_g memiliki invers 2 sisi, maka merupakan permutasi dari A.

Pernyataan (ii) di atas misalkan $\varphi: G \to S_A$ didefinisikan oleh $\varphi(g) = \sigma_g$. Perhatikan bahwa bagian (i) menunjukkan bahwa σ_g memang merupakan elemen dari S_A. Untuk melihat bahwa φ adalah homomorfisme, kita harus membuktikan $\varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$ (ingat bahwa S_A adalah grup di bawah komposisi fungsi). Permutasi $\varphi(g_1 g_2)$ dan $\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$ adalah sama jika dan hanya jika nilainya setuju pada setiap elemen $a \in A$. $\forall a \in A$

$$\begin{aligned}
\varphi(g_1 g_2)(a) &= \sigma_{g_1 . g_2}(a) && \text{(oleh definisi dari } \varphi\text{)} \\
&= (g_1 g_2). a && \text{(oleh definisi dari } \sigma_{g_1 g_2} \\
&= g_1 . (g_2 . a) && \text{(oleh property (1) sari suatu tindakan)} \\
&= \sigma_{g_1}\left(\sigma_{g_2}(a)\right) && \text{(oleh definisi dari } \sigma_{g_1} dan\, \sigma_{g_2}\text{)} \\
&= \left(\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)\right)(a) && \text{(oleh definisi dari } \varphi\text{)}
\end{aligned}$$

Ini membuktikan pernyataan(ii) di atas.

Secara intuitif, aksi grup dari G pada himpunan A hanya berarti bahwa setiap elemen g dalam G bertindak sebagai permutasi pada A dengan cara yang konsisten dengan operasi grup di G; pernyataan (i) dan (ü) di atas membuat tepat. Homomorfisme dari G ke S_A yang diberikan di atas disebut representasi permutasi yang dikaitkan dengan tindakan yang diberikan. Sangat mudah untuk melihat bahwa proses ini reversibel dalam arti jika $\varphi: G \to S_A$ adalah sembarang homomorfisme dari grup G ke grup simetris pada himpunan A, maka peta dari $G \times A$ ke didefinisikan A oleh

$$g.a = \varphi(g)(a)\ \forall g \in G, \forall a \in A$$

memenuhi sifat-sifat aksi grup G pada A. Jadi aksi grup G pada himpunan A dan homomorfisme dari G ke dalam simetri grup S_A berada dalam korespondensi bijektif yaitu, pada dasarnya adalah (gagasan yang sama, diungkapkan dalam terminologi yang berbeda).

Kita mencatat bahwa aksi mungkin lebih tepat disebut aksi kiri karena elemen grup muncul di sebelah kiri elemen himpunan. Kita juga dapat mendefinisikan gagasan tentang tindakan yang benar.