SUBGRUP YANG DIHASILKAN SUBSET GRUP DAN KISI SUBGRUP DARI GRUP

2.4 SUBGRUP YANG DIHASILKAN OLEH SUBSET DARI GRUP

Proposisi 8.

Jika P adalah himpunan tak kosong dari subgrup G, maka perpotongan semua elemen P juga merupakan subgrup dari G

Bukti:

No.	Pernyataan	Alasan
1	Misal $K = \bigcap_{H \in P} H$	Premis
2	$H \in P$ adalah subgrup	1
3	$1 \in H$	1
4	$1 \in K$, $K \neq \emptyset$	2, 3
5	$a, b \in K$	Pemisalan
6	$a, b \in H, \ \forall H \in P$	5
7	Setiap *H* adalah grup	2
8	$ab^{-1} \in H$, $\forall a, b \in H$	2
9	$ab^{-1} \in K$	7, 8
10	$K \leq G$	Proposisi 1 (Kriteria Subgrup) “Subset H dari Grup G adalah subgroup jika dan hanya jika H$\neq \emptyset$ dan $\forall\, x, y \in H$, $xy^{-1} \in H$

Definisi.

Jika A adalah sebarang himpunan bagian dari grup G yang dinyatakan dengan:

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{A \subseteq H \\ H \leq G}} H$$

Ini disebut subgroup *G* yang dihasilkan *A*

Jadi $\langle A \rangle$ adalah perpotongan semua subgroup G yang berisi A. $\langle A \rangle$ adalah subgrup G yang oleh Proposisi 8 diterapkan pada himpunan $A = \{H \leq G \mid A \subseteq H\}$. P tak kosong sebab $G \in P$. Karena A terletak pada setiap $H \in P$, A adalah himpunan bagian dari perpotongan mereka, yaitu $\langle A \rangle$.

$\langle A \rangle$ adalah elemen minimal unik dari P:

P adalah subgroup G berisi A, sehingga $\langle A \rangle \in P$

Terdapat beberapa elemen P yang berisi perpotongan semua elemen di P, yaitu $\langle A \rangle$.

Ketika A adalah himpunan berhingga $\{a_1 , a_2 , \dots , a_n\}$, kita tulis $\langle a_1 , a_2 , \dots , a_n \rangle$ untuk grup yang dihasilkan oleh $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ bukan $\langle \{a_1 , a_2 , \dots , a_n\} \rangle$.

Jika A dan B adalah dua himpunan bagian dari G, kita tuliskan $\langle A, B \rangle$ sebagai ganti dari $\langle A \cup B \rangle$

Misal $\bar{A} = \{a_1^{g1} a_2^{g2} \dots a_n^{gn} \mid n \in Z, n \geq 0\}$ dan $a_i \in A$, $\epsilon_1 = \pm 1$ untuk setiap $i\}$

di mana $\bar{A} = \{1\}$ jika A = $\emptyset$, sehingga $\bar{A}$ adalah himpunan semua perkalian berhingga dari elemen-elemen A dan invers dari elemen A.

Proposisi 9. $\bar{A} = \langle A \rangle$

Bukti:

No.	Pernyataan	Alasan
1	Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $\bar{A}$ adalah subgrup	
2	$\bar{A} \neq \emptyset$ $a = a_1^{g1} a_2^{g2} \dots a_n^{gn}$ $b = b_1^{\delta 1} b_2^{\delta 2} \dots b_m^{\delta m}$	Premis
3	$ab^{-1} = a_1^{g1} a_2^{g2} \dots a_n^{gn} \cdot b_m^{-\delta m} b_{m-1}^{-\delta m-1} \dots b_1^{-\delta 1}$	2
4	ab^{-1} adalah perkalian dari elemen-elemen A berpangkat ± 1	3
5	$ab^{-1} \in \bar{A}$	4

6	$\bar{A}$ subgroup dari G	2, 5
7	$\forall\, a \in A$, dapat ditulis a^1	Premis
8	$A \subseteq \bar{A}$	6, 7
9	$\langle A \rangle \subseteq \bar{A}$	8
10	$\langle A \rangle$ adalah grup memuat A, tertutup di bawah operasi grup dan proses pengambilan invers	8, 9
11	$\langle A \rangle$ berisi setiap elemen berbentuk $a_1^{g1}\, a_2^{g2} \ldots\, a_n^{gn}$	10
12	$\bar{A} \subseteq \langle A \rangle$	11
13	$\bar{A} = \langle A \rangle$	12 Terbukti

Cara lain untuk menuliskan $\langle A \rangle$:

$$\langle A \rangle = \{ a_1^{\alpha 1}\, a_2^{\alpha 2} \ldots a_n^{\alpha n} \mid \forall\, i\,,\ a_i \in A, a_i \in Z\,, a_i \neq a_{i+1}\,, n \in Z^{+} \}$$

Misal terdapat $S_n = \langle (1\ \ 2), (1\ \ 2\ \ 3 \ldots n) \rangle$

Pada contoh tersebut, S_n dihasilkan oleh sebuah elemen order 2 bersama-sama dengan salah satu order n.

Contoh Soal

Buktikan bahwa jika H adalah subgrup dari G, maka $\langle H \rangle = H$

Bukti:

No.	Pernyataan	Alasan
1	H adalah subgrup dari G	Premis
2	$H \neq \emptyset$	1 dan Proposisi 1 (Kriteria Subgrup)
3	$ab^{-1} \in H$, $\forall\ a, b \in H$	1 dan Proposisi 1 (Kriteria Subgrup)
4	$\langle H \rangle$ adalah grup memuat H, tertutup di bawah operasi grup dan proses pengambilan invers	1, 2, 3
5	$\langle H \rangle$ berisi setiap elemen berbentuk $h_1^{g1}\ h_2^{g2} \ldots\ h_n^{gn}$	4
6	$H \subseteq \langle H \rangle$	5
7	$H = \langle H \rangle$	6
8	$\langle H \rangle = H$	7 Terbukti

2.5 KISI SUBGRUP DARI GRUP

Pada bagian ini kami menjelaskan grafik yang terkait dengan grup yang menggambarkan hubungan/relasi di antara subgrupnya. Grafik ini, yang disebut kisi subgrup dari grup tersebut, adalah cara yang baik untuk "memvisualisasikan" grup itu pasti menerangi struktur grup yang lebih baik daripada tabel grup. Kita akan menggunakan diagram kisi, atau bagian dari mereka, untuk menggambarkan kedua grup tertentu dan sifat-sifat tertentu dari grup umum di seluruh bab tentang teori grup.

Selain itu, kisi subgrup grup akan memainkan peran penting dalam Teori Galois.*(Gagasan utama teori Galois adalah untuk mempertimbangkan permutasi (atau penataan ulang) akar sedemikian rupa sehingga persamaan aljabar yang dipenuhi oleh akar masih terpenuhi setelah akar telah berubah. Awalnya, teori ini telah dikembangkan untuk persamaan aljabar yang koefisiennya adalah bilangan rasional.)*

Kisi-kisi sub grup dari grup terbatas tertentu G dibangun sebagai berikut: plot semua subkelompok G mulai dari bawah dengan 1, berakhir di bagian atas dengan G dan, secara kasar, dengan sub grup urutan yang lebih besar diposisikan lebih tinggi pada halaman daripada urutan yang lebih kecil. Gambar jalur ke atas antara sub grup menggunakan aturan bahwa akan ada garis ke atas dari A ke B jika $A \leq B$ dan tidak ada sub grup dengan benar antara A dan B. Jadi jika $A \leq B$ ada jalur (mungkin banyak jalur) ke atas dari A ke B melewati rantai sub grup menengah (dan jalur ke bawah dari B ke A jika $B \geq A$). Posisi awal sub grup pada halaman, yang, apriori, agak sewenang-wenang, sering dapat (dengan latihan) dipilih untuk menghasilkan gambar sederhana. Perhatikan bahwa untuk setiap pasangan sub grup H dan K dari G sub grup terkecil yang unik.

yang berisi keduanya, yaitu (H,K) (disebut gabungan H dan K), dapat dibaca dari kisi sebagai berikut: jalur jejak ke atas dari H dan K sampai sub grup umum A yang berisi H dan K tercapai (perhatikan bahwa G itu sendiri selalu berisi semua sub grup sehingga setidaknya satu A tersebut ada). Untuk memastikan bahwa $A = (H, K)$ pastikan tidak ada $A_1 \leq A$ (ditunjukkan dengan jalur ke bawah dari A ke A_1) dengan H dan K yang terkandung dalam A_1 (jika tidak ganti A dengan A_1 dan ulangi proses untuk melihat apakah $A_1 = (H, K)$). Dengan proses simetris seseorang dapat membaca sub grup G terbesar yang terkandung dalam H dan K, yaitu persimpangan mereka (yang merupakan sub grup oleh Proposisi 8).

Ada beberapa batasan untuk proses ini, khususnya tidak dapat dilakukan untuk grup tak terbatas. Bahkan untuk grup terbatas dengan urutan yang relatif kecil, kisi bisa sangat rumit (lihat buku Groups of Order 2", n ≤6 oleh M. Hall dan J. Senior, Macmillan, 1964, untuk beberapa contoh yang membesarkan rambut). Pada akhir bagian ini kita akan menjelaskan bagaimana bagian dari kisi dapat ditarik dan digunakan bahkan untuk grup tak terbatas.

Perhatikan bahwa kelompok isomorfik memiliki kisi yang sama (i.c., grafik terarah yang sama). Grup nonisomorfik mungkin juga memiliki kisi yang identik (ini terjadi untuk dua grup urutan 16 - lihat latihan berikut). Karena kisi sub grup hanyalah bagian dari data yang akan kita bawa dalam deskriptor grup kita, ini tidak akan menjadi kelemahan serius (memang, bahkan mungkin berguna dalam melihat kapan dua grup nonisomorfik memiliki beberapa sifat umum).

<u>Contoh</u>

Kecuali untuk grup siklik (Contoh 1) kami belum membuktikan bahwa kisi-kisi berikut benar (misalnya, berisi semua sub grup dari kelompok yang diberikan atau memiliki gabungan dan persimpangan yang tepat). Untuk saat ini kita akan mengambil fakta-fakta ini seperti yang diberikan dan, ketika kita membangun lebih banyak teori dalam perjalanan teks, kita akan menetapkan sebagai latihan bukti bahwa ini memang benar.

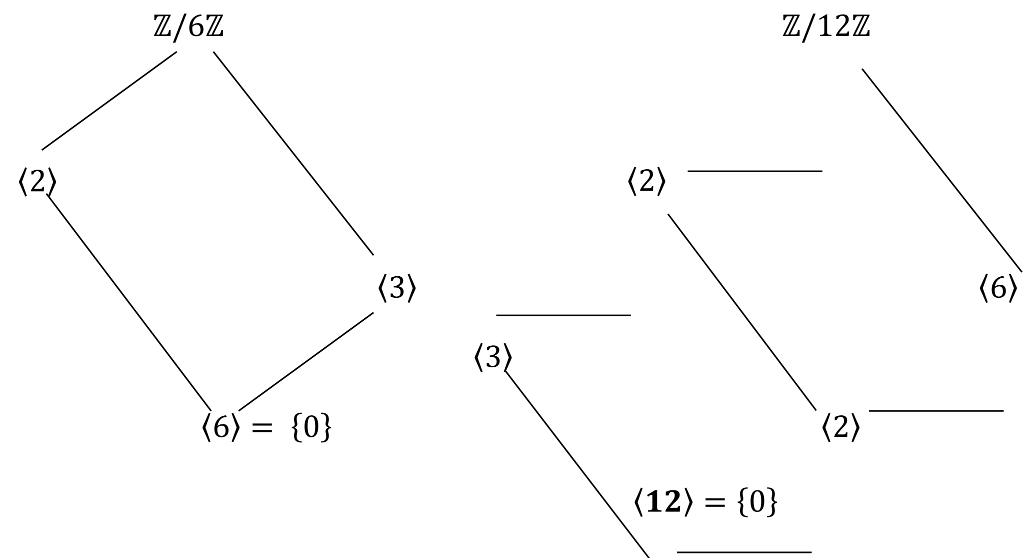
(1) Untuk G = Zn ≅/nZ, dengan Teorema 7 kisi subgrup G adalah kisi pembagi n (yaitu, pembagi n ditulis pada halaman dengan n di bagian bawah, 1 di bagian atas dan jalur ke atas dari a ke b jika b a). Beberapa contoh spesifik untuk berbagai nilai n mengikuti.

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \\ | \\ \langle 2 \rangle = \{0\} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \\ | \\ \langle 1 \rangle \\ | \\ \langle 4 \rangle = \{0\} \end{array} \qquad (catatan\ \langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle)$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \\ \Big| \\ \langle 2 \rangle \\ \Big| \\ \langle 2 \rangle \\ \Big| \\ \langle 8 \rangle = \{0\} \end{array} \qquad (catatan\ \langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle = \langle 7 \rangle)$$

Secara umum, jika p adalah bilangan prima, kisi $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ adalah :

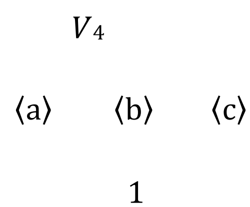
$$\begin{array}{c} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \\ \Big| \\ \langle \mathrm{p} \rangle \\ \Big| \\ \langle p^2 \rangle \\ \Big| \\ \langle p^3 \rangle \\ \Big| \\ \vdots \\ \Big| \\ \langle p^{n-1} \rangle \\ \Big| \\ \langle p^n \rangle = \{0\} \end{array}$$



(2) Klein 4-group (Viergruppe), V4, adalah grup urutan 4 dengan tabel perkalian

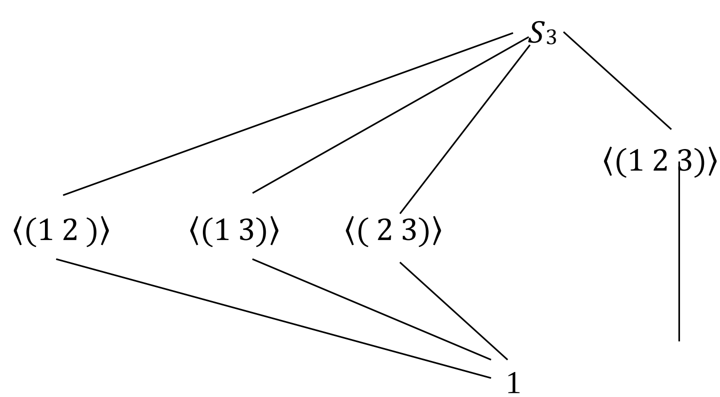
.	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

Dan kisi-kisi

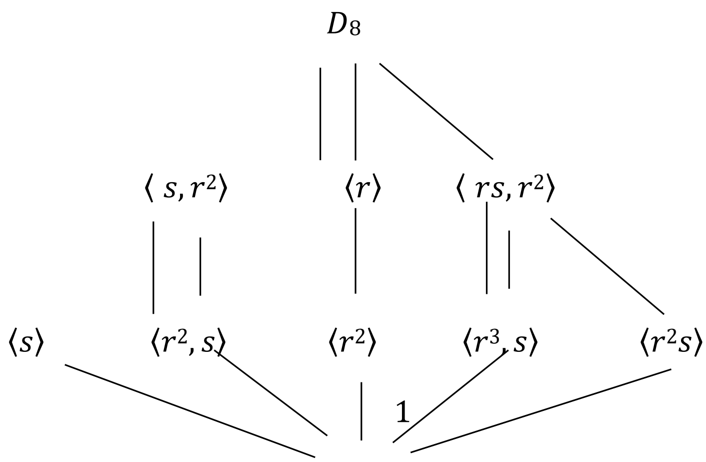


Perhatikan bahwa V4 adalah abelian dan tidak isomorfik untuk Z4 (mengapa?). Kita akan melihat bahwa Dg memiliki salinan isomorfik V4 sebagai subgrup, sehingga tidak perlu untuk memeriksa bahwa hukum asosiatif berlaku untuk operasi biner yang didefinisikan di atas.

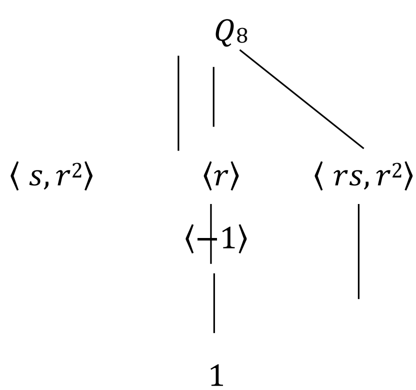
(3) Kisi-kisi dari S_3 adalah



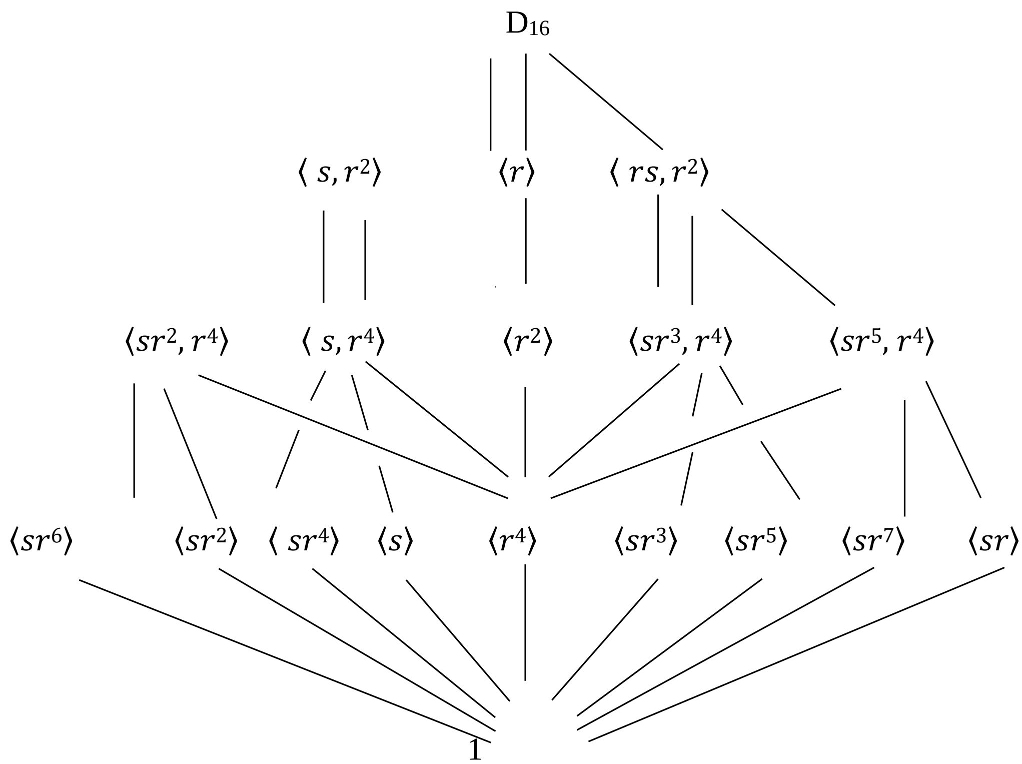
(4) Menggunakan notasi biasa kita untuk D_8 = (r, s), kisi D_8 adalah



(5) Kisi subgrup Q_8 adalah

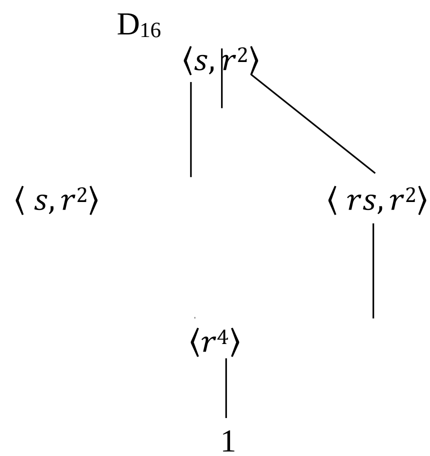


(6) Kisi D_{16} bukanlah grafik planar (tidak dapat digambar pada bidang tanpa garis yang melintasi). Salah satu cara menggambarnya adalah



Dalam banyak kasus baik dalam bukti teoritis dan contoh-contoh spesifik kita akan tertarik hanya pada informasi mengenai dua (atau sejumlah kecil) subgrup dari grup tertentu dan saling berkaitan. Untuk menggambarkan ini secara grafis kita akan menggambar sub kisi dari seluruh kisi grup yang berisi gabungan dan persimpangan yang relevan.

Garis yang tidak terputus dalam sub kisi seperti itu tidak akan, secara umum, berarti bahwa tidak ada subgrup di antara titik akhir garis. Kisi parsial untuk grup ini juga akan digunakan ketika kita berhadapan dengan grup tak terbatas. Misalnya, jika kita ingin membahas hanya hubungan antara subgrup $(sr^2, 4)$ dan (2) dari D_{16} kita akan menggambar sub kisi-kisi



Perhatikan bahwa (s, 2) dan (4) adalah gabungan dan persimpangan, masing-masing, dari dua subkelompok ini di D_{16}.

Akhirnya, mengingat kisi subgrub, relatif mudah untuk menghitung normalisasi dan pemusatan. Misalnya, di D_g kita dapat melihat bahwa Cpg (s) = (s, r^2) menjadi penyebab kita pertama kali menghitung bahwa r^2 € CD (s) (lihat Bagian 2). Ini membuktikan (s, r^2) ≤ CD_2 (s) (perhatikan bahwa elemen selalu milik pemusatannya sendiri). Satu-satunya subkelompok yang berisi (s, r^2) adalah subkelompok itu sendiri dan semua Ds. Kita tidak dapat memiliki Cp, (s) = Ds karenar tidak bolak-balik dengan s (yaitu, r &CD, (s)). Ini hanya menyisakan kemungkinan yang diklaim untuk CD, (s).